

Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums

Günther, Wilhelm

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 10, 1958,
S.195-213



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums

Von Wilhelm Günther

mit 4 Abbildungen

vorgelegt von H. Schaefer

Summary: The "Cosserat-continuum" is a continuum of points, each of them provided with a space-direction. In this paper cinematics and statics of this continuum are investigated, and the author wishes to emphasize the analogies between the equations for cinematical and statical quantities. Further there is shown, that the continuum used in dislocation-theory is an incompatible Cosserat-continuum.

Übersicht: In einem Cosseratschen Kontinuum ist jedem Punkt einer stetigen Punktmenge eine räumliche Orientierung zugeordnet. Es werden die kinematischen und statischen Gleichungen eines solchen Kontinuums aufgestellt und die Analogien zwischen diesen Gleichungssystemen besprochen. Es wird gezeigt, daß das kinematische Modell der Versetzungstheorie ein inkompatibles Cosseratsches Kontinuum ist.

1. Einführung

Der gerade Balken mit Längs-, Schub- und Biegeverformung liefert das einfachste Modell eines Cosseratschen Kontinuums: In der Auffassung der technischen Biegelehre wird er in eine Folge starrer Scheiben, der „Querschnitte“, aufgelöst, die in geeigneter Weise federnd gegeneinander abgestützt sind (Abb. 1a). Als kleine Lageänderungen lassen wir zu: 1. die Verschiebungen $u(x)$ und $w(x)$ der Querschnitte in x - und z -Richtung, ohne Drehung der Scheiben, wobei die Balkenachse mit

$$\varepsilon(x) = u'(x) \quad (1,1)$$

gedehnt und zur „Biegelinie“ $z = w(x)$ wird, relativ zu deren Normalen die Querschnitte um den Winkel $w'(x)$ verdreht sind (Abb. 1b), und 2) eine von den Verschiebungen unabhängige Verdrehung $\varphi(x)$ der Querschnitte (Abb. 1c), so daß im Endergebnis die Querschnitte um den Winkel

$$\psi(x) = w'(x) + \varphi(x) \quad (1,2)$$

aus der Biegeliniennormalen herausgedreht sind. Führen wir noch die Größe

$$\kappa(x) = \varphi'(x) \quad (1,3)$$

ein, so haben wir folgendes System von Deformationen: die Längsdehnung $\varepsilon(x)$, die Schubverformung $\psi(x)$ und die Verdrehungsdeformation $\kappa(x)$. Sind umgekehrt diese Deformationen gegeben, so können $u(x)$, $w(x)$ und

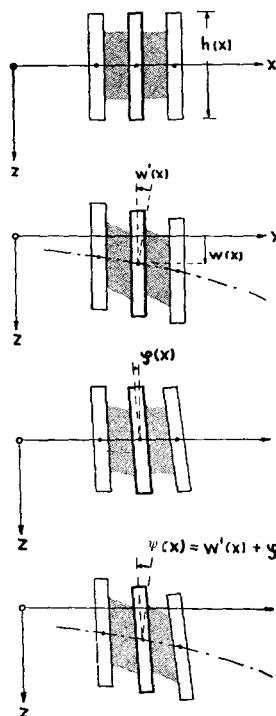


Abb. 1

a) $\varphi(x)$ durch Integration bis auf eine starre Bewegung ermittelt werden:

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x \varepsilon(\xi) d\xi,$$

b)
$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x \kappa(\xi) d\xi, \quad (1,4)$$

$$w(x) = w_0 - \varphi_0(x - x_0) + \int_{x_0}^x [\psi(\xi) - (x - \xi)\kappa(\xi)] d\xi$$

c) mit $u_0 = u(x_0)$ usw.

Welche statischen Größen den drei Verformungen zugeordnet sind, wird durch das Prinzip der virtuellen Verrückungen geregelt: Der Balken trage die äußeren Längs-, Quer- und Momentenbelastungen $l(x)$, $q(x)$ und $m(x)$, und werde etwa am rechten freien Ende $x = a$ durch die Kräfte $L^{(a)}$, $Q^{(a)}$ und das Moment $M^{(a)}$ beansprucht; das linke Ende sei eingespannt. Wir stellen Gleichgewicht am starren Balken her und erhalten zunächst:

$$- \int_0^a [l(x) \delta u(x) + q(x) \delta w(x) + m(x) \delta \varphi(x)] dx - [L^{(a)} \delta u(a) + Q^{(a)} \delta w(a) + M^{(a)} \delta \varphi(a)] = 0. \quad (1,5)$$

Die Starrheitsbedingungen lauten:

$$\delta \varepsilon(x) = 0, \quad \delta \psi(x) = 0, \quad \delta \kappa(x) = 0 \quad (1,6)$$

mit

$$\delta \varepsilon(x) = \frac{d}{dx} [\delta u(x)] \quad \text{usw.}; \quad (1,7)$$

wir multiplizieren sie der Reihe nach mit den „Lagrangeschen Faktoren“ $L(x)$, $Q(x)$, $M(x)$ und fügen sie nach Integration zu (1,5) hinzu:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \{ [L(x) \delta \varepsilon(x) + Q(x) \delta \psi(x) + M(x) \delta \kappa(x)] - \\ & - [l(x) \delta u(x) + q(x) \delta w(x) + m(x) \delta \varphi(x)] \} dx - \\ & - [L^{(a)} \delta u(a) + Q^{(a)} \delta w(a) + M^{(a)} \delta \varphi(a)] = 0. \end{aligned} \quad (1,8)$$

Jetzt kann der Balken als unstarr angesehen werden, und damit werden die Lagrangeschen Faktoren, die am starren Körper Reaktionen waren, zu ein-

geprägten Kraftgrößen. Mit (1,7) entsteht nach partieller Integration und mit Berücksichtigung der Einspannbedingungen

$$\delta u(o) = 0, \quad \delta w(o) = 0, \quad \delta \varphi(o) = 0: \quad (1,9)$$

$$\begin{aligned} - \int_0^a \{ [L'(x) + l(x)] \delta u(x) + [Q'(x) + q(x)] \delta w(x) + \\ + [M'(x) - Q(x) + m(x)] \delta \varphi(x) \} dx + \\ + [L(a) - L^{(a)}] \delta u(a) + [Q(a) - Q^{(a)}] \delta w(a) + \\ + [M(a) - M^{(a)}] \delta \varphi(a) = 0. \end{aligned} \quad (1,10)$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} L'(x) + l(x) &= 0, \\ Q'(x) + q(x) &= 0, \\ M'(x) - Q(x) + m(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1,11)$$

längs der Balkenachse und

$$\begin{aligned} L(a) - L^{(a)} &= 0, \\ Q(a) - Q^{(a)} &= 0, \\ M(a) - M^{(a)} &= 0 \end{aligned} \quad (1,12)$$

am freien Balkenende. (1,12) ergibt die statische Deutung der *Lagrangeschen* Faktoren zu

$$\begin{aligned} L(x) &= \text{Längskraft,} \\ Q(x) &= \text{Querkraft,} \\ M(x) &= \text{Biegemoment;} \end{aligned}$$

(1,11) sind die Gleichgewichtsbedingungen für diese statischen Größen. Für das Folgende ist es nun zweckmäßig, von den bildlichen Einzelheiten des soeben besprochenen Modells zu abstrahieren. Dazu ersetzen wir jeden Querschnitt, deren Gesamtheit wir uns in stetiger Folge auf der Balkenachse aufgereiht denken, durch ein lokales starres Koordinatensystem. Auf diese Weise wird die Balkenachse, die — allgemeiner als bisher — auch eine Raumkurve sein kann und dann den räumlich gekrümmten Balken repräsentiert, Träger einer einparametrischen Schar von Koordinatensystemen („trièdres mobiles“ bei *E. und F. Cosserat* [1]) oder, anders ausgedrückt, Träger einer stetigen Folge „orientierter Punkte“. In der Anfangslage sei die Orientierung der Koordinatensysteme bzw. Punkte durch stetige Funktionen des Kurvenparameters festgelegt. Durch Verschiebung der Anfangspunkte und Drehung der Achsen, wobei diese Lageänderungen auch stetige Funktionen des Kurvenparameters sein sollen, wird das Kontinuum von Koordinatensystemen bzw. orientierten Punkten „deformiert“; den in geeigneter Weise zu definierenden „Deformationen“ werden dann mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen statische Größen zugeordnet, deren Verhalten an einer freien Intervallgrenze ihre statische Bedeutung erkennen läßt; die Differentialgleichungen, denen sie genügen, sind die notwendigen Bedingungen dafür, daß sie sich an einem Element das Gleichgewicht halten. So sind also bei diesem „eindimensionalen (besser: einparametrischen) *Cosseratschen* Kontinuum“ die statischen Größen vermöge des Prinzips der virtuellen Verrückungen durch die Kinematik bereits festgelegt. —

Die Erweiterung dieser Gedankengänge auf 2- und 3-dimensionale Bereiche ist leicht und führt auf den Begriff der „*Cosseratschen Fläche*“, die Träger von ∞^2 orientierten Punkten, und des „*Cosseratschen Raumes*“, der Träger von ∞^3 orientierten Punkten ist. Entsprechend den Bewegungsmöglichkeiten eines starren Körpers hat jedes dieser Kontinua i. a. sechs funktionale Freiheitsgrade, während das Kontinuum der nichtorientierten Punkte, das ein Sonderfall des *Cosseratschen* Kontinuums ist, höchstens drei funktionale Freiheitsgrade hat, die dann durch das Verschiebungsfeld allein gegeben sind.

In ihrer umfangreichen Monographie [1] haben *E. und F. Cosserat* systematisch die Mechanik kontinuierlicher Systeme behandelt, die aus orientierten Punkten bestehen, allerdings in einer Darstellung, die heute nur noch schwer lesbar ist. Die *Cosseratsche* Arbeit kann aber nicht isoliert betrachtet werden: sowohl bei den Versuchen, mechanische Äthermodelle zu entwickeln, wie auch in der Diskussion über die Konstitution des anisotropen elastischen Körpers müßte man fast zwangsläufig auf eine solche Mechanik stoßen. Gerade dies waren aber die Themen, die das Hauptinteresse vieler Forscher des 19. Jahrhunderts auf sich zogen. Erwähnt seien hier nur die Arbeiten von *Kelvin* [2], *Poisson* [3] und insbesondere von *Voigt* [4], dessen Vorstellungen denen von *E. und F. Cosserat* recht nahe kamen. Nachdem diese Fragen in der Folge entweder als sinnlos oder als auf andere Weise als gelöst angesehen werden konnten, schienen die *Cosseratschen* Gedankengänge nur noch die Bedeutung einer historischen Merkwürdigkeit zu haben und gerieten fast in Vergessenheit, wenn man von einzelnen französischen Arbeiten, so der von *Sudria* [5], absieht.¹⁾

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, unter Beschränkung auf lineare Deformationen eine moderne Darstellung der *Cosseratschen* Ideen zu geben und in diesem Rahmen vollständige Systeme von kinematischen und statischen Gleichungen zu entwickeln. Anlaß zu dieser Untersuchung war einmal die Tatsache, daß in der „Kontinuumstheorie der Versetzungen“ („Dislocation Theory“) ein kinematisches Modell benutzt wird, welches einem inkompatiblen *Cosseratschen* Kontinuum entspricht²⁾. Wie jedoch das eingangs behandelte Beispiel zeigt, gibt es auch innerhalb der klassischen Festigkeitslehre Probleme, bei denen die *Cosseratschen* Vorstellungen nützlich sein können. Der Verfasser wird an anderer Stelle über eine Schalentheorie berichten, in der man auf diese Weise zu sehr übersichtlichen Gleichungen und daher auch zu Einblicken in Zusammenhänge geführt wird, die von der üblichen Betrachtungsweise her schwerlich hätten gewonnen werden können. Schließlich bestehen noch interessante Beziehungen des Problems zur Differentialgeometrie sowohl Nicht-Riemannscher als auch Nichtholonomer Räume, die, von der Versetzungstheorie her, durch *Kondo* [8] und *Bilby, Bullough und Smith* [9] aufgedeckt wurden.

¹⁾ Nachtrag während der Drucklegung: In einer bemerkenswerten Studie haben *Ericksen und Truesdell* eine Theorie endlich verformter Balken und Schalen auf Grund der *Cosseratschen* Vorstellungen entwickelt: *J. L. Ericksen & C. Truesdell: Exact Theory of Stress and Strain in Rods and Shells; Arch. Rational Mechanics and Analysis, Vol. 1 (1958)*⁴⁾.

²⁾ Man vergleiche hierzu etwa *Kröner* [6] und *Seeger* [7].

2. Kinematik des COSSERATschen Kontinuums

Wir benutzen allgemeine Koordinaten $q^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$); die Orientierung jedes, durch den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^{(i)}) \quad (2,1)$$

im Anfangszustand gegebenen Punktes wird man i. a. so wählen, daß das lokale Koordinatensystem durch die Maßvektoren

$$\mathbf{g}_i = \partial_i \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \quad (2,2)$$

gegeben ist. Wir verabreden, daß $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden sollen. Im Sinne der gewählten Maßbestimmung liegen diese Koordinatensysteme dann alle „parallel“, da die kovariante Ableitung der Maßvektoren ja verschwindet. Nach einer kleinen Lageänderung seien die Anfangspunkte der lokalen Koordinatensysteme um

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(q^{(i)}) \quad (2,3)$$

verschoben, die Systeme selbst um

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(q^{(i)}) \quad (2,4)$$

aus ihrer Anfangslage herausgedreht — da die Drehung klein sein soll, ist es zulässig, sie durch einen Vektor $\vec{\varphi}$ darzustellen. Den Deformationszustand beschreiben wir durch die Deformationsvektoren

$$\vec{\varepsilon}_i = \partial_i \mathbf{w} + \mathbf{g}_i \times \vec{\varphi}, \quad (2,5)$$

$$\vec{\kappa}_i = \partial_i \vec{\varphi} \quad (2,6)$$

deren Bedeutung man sich an Hand des Einführungsbeispiels klarmacht: dort ist

$$q^{(1)} = x, \quad q^{(2)} = y, \quad q^{(3)} = z,$$

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u(x) \\ 0 \\ w(x) \end{bmatrix}, \quad \vec{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi(x) \\ 0 \end{bmatrix},$$

so daß

$$\vec{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} u'(x) \\ 0 \\ w'(x) + \varphi(x) \end{bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}_3 = \begin{bmatrix} -\varphi(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\kappa}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi'(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\kappa}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\kappa}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wird. Diese Vektoren können wir zu den Matrizen

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} = u'(x) & \varepsilon_{21} = 0 & \varepsilon_{31} = -\varphi(x) \\ \varepsilon_{12} = 0 & \varepsilon_{22} = 0 & \varepsilon_{32} = 0 \\ \varepsilon_{13} = w'(x) + \varphi(x) & \varepsilon_{23} = 0 & \varepsilon_{33} = 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_{11} = 0 & \kappa_{21} = 0 & \kappa_{31} = 0 \\ \kappa_{12} = \varphi'(x) & \kappa_{22} = 0 & \kappa_{32} = 0 \\ \kappa_{13} = 0 & \kappa_{23} = 0 & \kappa_{33} = 0 \end{bmatrix}$$

zusammenfassen.

$\varepsilon_{11} = u'(x)$ ist wie üblich die Dehnung in x -Richtung. Durch das Verschiebungsfeld $w(x)$ wird (Abb. 2) das System der orthogonalen Koordinaten $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ in ein schiefwinkliges System x_1^*, x_2^*, x_3^* überführt, dessen x_1^* -Achse tangential zur verformten x_1 -Kurve liegt, durch die Drehung $\varphi(x)$ hingegen in ein orthogonales System $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$. Es ist

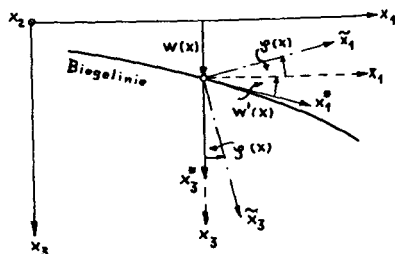


Abb. 2

$$\angle(x_1^*, \tilde{x}_3) = \frac{\pi}{2} - (w' + \varphi) = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_{13},$$

$$\angle(x_3^*, \tilde{x}_1) = \frac{\pi}{2} - (-\varphi) = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_{31},$$

so daß die ε_{ik} offenbar die natürlichen Verallgemeinerungen der Verzerrungsgrößen des Punktkontinuums sind. Die Deutung der Deformationsgrößen κ_{ik} liegt auf der Hand: es handelt sich um relative Drehungen innerhalb des Systems der lokalen Koordinatensysteme.

Die Übertragung auf das räumliche Kontinuum verläuft nun so, daß man die angegebenen Operationen innerhalb der einzelnen Koordinatenflächen vornimmt. Es entstehen im räumlichen Kontinuum infolge des Verschiebungsfeldes w und des Drehfeldes $\vec{\varphi}$ neue, i. a. nichtholonome Koordinatensysteme; die Deformationen können dann wie im Modellfall gedeutet werden.

Aus den 6 Lageänderungen w und $\vec{\varphi}$ werden gemäß (2,5) und (2,6) die 18 Deformationen ε_i und κ_i hergeleitet. Integriert man umgekehrt diese Gleichungen bei gegebenen Deformationen, so erhält man:

$$\vec{\varphi}(r) = \vec{\varphi}(r_0) + \int_{r_0}^r \vec{\kappa}_\alpha(\bar{s}) d\bar{s}^\alpha, \quad (2,7)$$

$$w(r) = w(r_0) + \vec{\varphi}(r_0) \times (r - r_0) + \int_{r_0}^r [\vec{\varepsilon}_\alpha(\bar{s}) + (\bar{s} - r) \times \vec{\kappa}_\alpha(\bar{s})] d\bar{s}^\alpha; \quad (2,8)$$

darin ist \bar{s} der Ortsvektor des Integrationsweges, und es wird die Summa-

tionsregel der Tensorrechnung³⁾ benutzt. Die ausintegrierten Teile stellen starre Bewegungen dar, die den Deformationszustand ja nicht ändern können. Damit nun die Lageänderungen eindeutige Ortsfunktionen werden, müssen die Integrale in (2,7) und (2,8) totale Differentiale sein, und das führt auf die Bedingungen

$$\partial_{[i} \vec{\varkappa}_{l]} = \frac{1}{2} (\partial_i \vec{\varkappa}_l - \partial_l \vec{\varkappa}_i) = 0, \quad (2,9)$$

$$\partial_{[i} \vec{\varepsilon}_{l]} + \vec{g}_{[i} \times K_{l]} = 0, \quad (2,10)$$

Gleichungen, die man durch Elimination von \vec{w} und $\vec{\varphi}$ auch unmittelbar aus (2,5) und (2,6) erhalten kann. Sie sind die hinreichenden Bedingungen dafür, daß aus den Deformationen die Lageänderungen bis auf starre Bewegungen eindeutig berechnet werden können. Wir wollen sie noch in eine andere Form setzen, die ihre weitere Diskussion vereinfacht. Dazu führen wir den „Permutationstensor“ e^{ikl} ein:

$$e^{ikl} = g^i \cdot (g^k \times g^l) = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{g}}, & \text{wenn } (i, k, l) \text{ eine gerade,} \\ -\frac{1}{\sqrt{g}}, & \text{wenn } (i, k, l) \text{ eine ungerade} \\ & \text{Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei} \\ & \text{Indizes gleich sind;} \end{cases} \quad (2,11)$$

darin bilden die „kontravarianten Maßvektoren“ g^k ein Rechtssystem und sind durch

$$g^k \cdot g_i = \delta_i^k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq i, \\ 1 & \text{für } k = i \end{cases} \quad (2,12)$$

definiert, und es ist g die Determinante des Maßtensors:

$$g = \text{Det } (g_{ik}) = \text{Det } (g_i \cdot g_k). \quad (2,13)$$

Wir erhalten damit folgende „Verträglichkeitsbedingungen“ („Kompatibilitätsbedingungen“):

$$\overset{(1)}{\mathfrak{G}}^k = e^{k\lambda\mu} \partial_\lambda \vec{\varkappa}_\mu = 0, \quad (2,14)$$

$$\overset{(2)}{\mathfrak{G}}^k = e^{k\lambda\mu} [\partial_\lambda \vec{\varepsilon}_\mu + g_\lambda \times \vec{\varkappa}_\mu] = 0; \quad (2,15)$$

die „Inkompatibilitäten“ $\overset{(1)}{\mathfrak{G}}^k$ und $\overset{(2)}{\mathfrak{G}}^k$ müssen verschwinden. Es liegt auf der Hand, daß diese 18 Gleichungen nicht unabhängig voneinander sein können, da in ihren Lösungen, den 18 Deformationen, noch 6 willkürliche Funktionen (die Lageänderungen \vec{w} und $\vec{\varphi}$) stecken müssen. In der Tat bestehen zwischen ihnen 6 Differentialidentitäten, nämlich die „Divergenzgleichungen“

$$\partial_\alpha (\sqrt{g} \overset{(1)}{\mathfrak{G}}^\alpha) = 0, \quad (2,16)$$

$$\partial_\alpha (\sqrt{g} \overset{(2)}{\mathfrak{G}}^\alpha) + g_\alpha \times (\sqrt{g} \overset{(1)}{\mathfrak{G}}^\alpha) = 0, \quad (2,17)$$

³⁾ Über griechische Indizes wird von 1 bis 3 summiert.

so daß nur $18 - 6 = 12$ unabhängige Verträglichkeitsbedingungen übrigbleiben, wie es sein muß.

Die beiden Systeme (2.14) und (2.15) lassen sich zusammenfassen. Dazu lösen wir (2.15) nach den $\vec{\kappa}_\mu$ auf (wobei wir der Allgemeinheit halber auch inkompatible Deformationen berücksichtigen wollen); nach einer längeren Zwischenrechnung erhalten wir:

$$\vec{\kappa}_\mu = e^{\alpha\beta\varrho} \left[(\partial_\alpha \vec{\varepsilon}_\beta \cdot \mathfrak{g}_\mu) \mathfrak{g}_\varrho - \frac{1}{2} (\partial_\alpha \vec{\varepsilon}_\beta \cdot \mathfrak{g}_\varrho) \mathfrak{g}_\mu \right] - \left[\left(\overset{(2)}{\mathfrak{Z}}^\varrho \cdot \mathfrak{g}_\mu \right) \mathfrak{g}_\varrho - \frac{1}{2} \left(\overset{(2)}{\mathfrak{Z}}^\varrho \cdot \mathfrak{g}_\varrho \right) \mathfrak{g}_\mu \right]. \quad (2.18)$$

Setzt man dies in (2.14) ein, so ergibt sich:

$$e^{k\lambda\mu} e^{\alpha\beta\varrho} \partial_\lambda \left[(\partial_\alpha \vec{\varepsilon}_\beta \cdot \mathfrak{g}_\mu) \mathfrak{g}_\varrho - \frac{1}{2} (\partial_\alpha \vec{\varepsilon}_\beta \cdot \mathfrak{g}_\varrho) \mathfrak{g}_\mu \right] = \overset{(1)}{\mathfrak{Z}}^k + e^{k\lambda\mu} \partial_\lambda \left[\left(\overset{(2)}{\mathfrak{Z}}^\varrho \cdot \mathfrak{g}_\mu \right) \mathfrak{g}_\varrho - \frac{1}{2} \left(\overset{(2)}{\mathfrak{Z}}^\varrho \cdot \mathfrak{g}_\varrho \right) \mathfrak{g}_\mu \right]. \quad (2.19)$$

Bevor wir dies System analysieren, ist es zweckmäßig, zur reinen Tensor-schreibweise überzugehen, da sonst die Rechnungen zu weitläufig werden, und benutzen die Gelegenheit, um auch die wichtigsten der vorhergehenden kinematischen Gleichungen rein tensoriell darzustellen. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{w} &= w_\alpha \mathfrak{g}^\alpha & \text{mit} & & w_\alpha &= \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{g}_\alpha, \\ \vec{\varphi} &= \varphi^\alpha \mathfrak{g}_\alpha & \text{mit} & & \varphi^\alpha &= \vec{\varphi} \cdot \mathfrak{g}^\alpha, \\ \vec{\varepsilon}_i &= \varepsilon_{i\alpha} \mathfrak{g}^\alpha & \text{mit} & & \varepsilon_{i\alpha} &= \vec{\varepsilon}_i \cdot \mathfrak{g}_\alpha, \\ \vec{\kappa}_i &= \kappa_i^\alpha \mathfrak{g}_\alpha & \text{mit} & & \kappa_i^\alpha &= \vec{\kappa}_i \cdot \mathfrak{g}^\alpha, \\ \overset{(1)}{\mathfrak{Z}}^k &= \overset{(1)}{I}^{k\alpha} \mathfrak{g}_\alpha & \text{mit} & & \overset{(1)}{I}^{k\alpha} &= \overset{(1)}{\mathfrak{Z}}^k \cdot \mathfrak{g}^\alpha, \\ \overset{(2)}{\mathfrak{Z}}^k &= \overset{(2)}{I}^{k\cdot} \mathfrak{g}_\alpha & \text{mit} & & \overset{(2)}{I}^{k\cdot} &= \overset{(2)}{\mathfrak{Z}}^k \cdot \mathfrak{g}_\alpha \end{aligned} \quad (2.20)$$

(man kann in allen Fällen zeigen, daß die so definierten Größen Tensoren 1. bzw. 2. Stufe sind), und wir ersetzen ferner den gewöhnlichen durch den kovarianten Differentialquotienten.

Dann wird, mit $e_{i\alpha} = \mathfrak{g}_i \cdot (\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\alpha)$,

$$\varepsilon_{il} = \nabla_i w_l - e_{il\alpha} \varphi^\alpha \quad (2.5a)$$

$$\kappa_i^l = \nabla_i \varphi^l \quad (2.6a)$$

die Definition der Deformationsgrößen; die Verträglichkeitsbedingungen lauten jetzt:

$$\nabla_{[i} \kappa_{l]}^m = 0, \quad (2.9a)$$

$$\nabla_{[i} \varepsilon_{l]m} + e_{xm} [\kappa_{il}]^\alpha = 0 \quad (2.10a)$$

bzw.

$$I^{kl} = e^{k\lambda\mu} \nabla_\lambda \varkappa_\mu^l = 0, \quad (2.14a)$$

$$I_{\cdot l}^{(2)k} = e^{k\lambda\mu} \nabla_\lambda \varepsilon_{\mu l} + \delta_l^k \varkappa_x^\alpha - \varkappa_l^k = 0, \quad (2.15a)$$

zwischen denen die Differentialidentitäten

$$\nabla_\alpha I^{\alpha l} = 0, \quad (2.16a)$$

$$\nabla_\alpha I_{\cdot l}^{(2)x} + e_{\alpha\beta l} I^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.17a)$$

bestehen. Die Auflösung von (2.15a) nach den Deformationen \varkappa_μ^l ergibt:

$$\varkappa_\mu^l = e^{\alpha\beta\varrho} \left[\delta_\varrho^l \nabla_\alpha \varepsilon_{\beta\mu} - \frac{1}{2} \delta_\mu^l \nabla_\alpha \varepsilon_{\beta\varrho} \right] - \left[I_{\cdot\mu}^l - \frac{1}{2} \delta_\mu^l I_{\cdot x}^{(2)x} \right], \quad (2.18a)$$

und daraus durch Einsetzen in (2.15a):

$$\begin{aligned} & \left[e^{k\alpha\lambda} e^{l\beta\mu} + \frac{1}{2} e^{klx} e^{\beta\mu\lambda} \right] \nabla_\alpha \nabla_\beta \varepsilon_{\mu\lambda} = \\ & = \left[I^{kl} + e^{k\alpha\lambda} \nabla_\alpha I_{\cdot\lambda}^{(2)} + \frac{1}{2} e^{klx} \nabla_\alpha I_{\cdot\lambda}^{(2)x} \right] = I^{*kl}. \end{aligned} \quad (2.19a)$$

Für den resultierenden Inkompatibilitätstensor I^{*kl} gilt nun: er ist, auf Grund von (2.16a) divergenzfrei, d. h. es ist

$$\nabla_\alpha I^{*\alpha l} = 0, \quad (2.21)$$

und er ist, auf Grund von (2.17a), symmetrisch, d. h. es ist

$$I^{*lk} = I^{*kl}. \quad (2.22)$$

Das muß auch für die linke Seite von (2.19a) zutreffen und kann leicht bestätigt werden: die Divergenzfreiheit folgt durch unmittelbares Ausrechnen, während die Symmetrie sich aus folgender Überlegung ergibt: Wir zerlegen den Deformationstensor $\varepsilon_{\mu\lambda}$ in seinen symmetrischen Teil

$$\varepsilon_{\mu\lambda}^S = \varepsilon_{(\mu\lambda)} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{\mu\lambda} + \varepsilon_{\lambda\mu}) \quad (2.23)$$

und seinen antisymmetrischen Teil

$$\varepsilon_{\mu\lambda}^A = \varepsilon_{[\mu\lambda]} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{\mu\lambda} - \varepsilon_{\lambda\mu}). \quad (2.24)$$

Im Dreidimensionalen kann man einen antisymmetrischen Tensor stets durch einen Vektor nach folgender Vorschrift ersetzen:

$$\varepsilon_{\mu\lambda}^A = e_{\mu\lambda\varrho} \varepsilon^\varrho, \quad \varepsilon^\varrho = \frac{1}{2} e^{\varrho\mu\lambda} \varepsilon_{\mu\lambda}^A. \quad (2.25)$$

Es wird also

$$\varepsilon_{\mu\lambda} = \varepsilon_{\mu\lambda}^S + e_{\mu\lambda\varrho} \varepsilon^\varrho. \quad (2.26)$$

Dies gibt, in (2.19a) eingesetzt:

$$e^{k\alpha\lambda} e^{l\beta\mu} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varepsilon_{\lambda\mu}^S = I^{kl}, \quad (2.27)$$

denn die von ε^e herrührenden Anteile heben sich weg. Die linke Seite ist in den unteren Indexpaaren (α, β) und (λ, μ) symmetrisch, daher auch in den entsprechenden oberen Indexpaaren, und daraus folgt sofort auch die Symmetrie im Indexpaar (k, l) .

Zum Abschluß des kinematischen Teils wollen wir noch den Sonderfall des gewöhnlichen Punktkontinuums betrachten. Es ist dadurch ausgezeichnet, daß in ihm die Drehung $\vec{\varphi}$ bereits durch das Verschiebungsfeld w festgelegt ist („trièdre cachée“ in [1]), nämlich durch dessen „mittlere Drehung“

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} w \quad (2.28)$$

oder

$$\varphi^i = \frac{1}{2} e^{ix\beta} \nabla_\alpha w_\beta. \quad (2.29)$$

Nach (2.5a) wird dann

$$\varepsilon_{il} = \frac{1}{2} (\nabla_i w_l + \nabla_l w_i) = \varepsilon_{il}^S \quad (2.30)$$

der Deformationstensor ε also symmetrisch; umgekehrt folgt aber auch aus $\varepsilon_{il} = \varepsilon_{il}^S$ nach (2.5a), daß dann $\vec{\varphi}$ die mittlere Drehung (2.28) des Verschiebungsfeldes wird. Für das gewöhnliche kompatible Punktkontinuum ist daher die Symmetrie des Deformationstensors ε charakteristisch, dessen Verträglichkeit durch die Gleichungen

$$I^{kl} = e^{k\alpha\lambda} e^{l\beta\mu} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varepsilon_{\lambda\mu}^S = 0 \quad (2.31)$$

gesichert wird. Sind sie erfüllt, so kann man nach (2.8) und wegen der in diesem Fall aus (2.18a) leicht herzuleitenden Beziehung

$$\vec{\kappa}_\alpha = \operatorname{rot} \vec{\varepsilon}_\alpha^S \quad (2.32)$$

die Verschiebung w aus den Deformationen $\vec{\varepsilon}_i$ in folgender Weise berechnen:

$$w(r) = w(r_0) + \left[\frac{1}{2} (\operatorname{rot} w)_{r=r_0} \right] \times (r - r_0) + \int_{r_0}^r [\vec{\varepsilon}_\alpha^S(\bar{s}) + (\bar{s} - r) \times \operatorname{rot} \vec{\varepsilon}_\alpha^S(\bar{s})] d\bar{s}. \quad (2.33)$$

3. Statik des COSSERATschen Kontinuums

Um diejenigen statischen Größen zu finden, die im räumlichen Kontinuum der orientierten Punkte den Deformationen zugeordnet sind, gehen wir wieder vom Prinzip der virtuellen Verrückungen aus. Ein Volumelement dV sei durch die äußere Kraft $f dV$ und durch das äußere Moment $m dV$ belastet,

ein Flächenelement df durch die äußere Kraft qdf und das äußere Moment $p df$. Das Auftreten solcher, von den Kräften unabhängiger Momente ist charakteristisch für die Statik des *Cosseratschen* Kontinuums; physikalische Bedeutung scheinen sie nach *Kröner* [6] und *Rieder* [10] bei der Beanspruchung ferromagnetischer Kristalle zu haben.

Dies System der äußeren Kräfte und Momente hält sich an dem durch F abgegrenzten starren Körper das Gleichgewicht, wenn

$$-\iint_{(V)} [\mathfrak{f} \cdot \delta \mathfrak{w} + \mathfrak{m} \cdot \delta \vec{\varphi}] dV - \iint_{(F)} [q \cdot \delta \mathfrak{w} + \mathfrak{p} \cdot \delta \vec{\varphi}] df = 0 \quad (3.1)$$

ist. Die Starrheitsbedingungen

$$\delta \vec{\varepsilon}_x = \partial_x (\delta \mathfrak{w}) + \mathfrak{g}_x \times \delta \vec{\varphi} = 0, \quad (3.2)$$

$$\delta \vec{\varepsilon}_x = \partial_x (\delta \vec{\varphi}) = 0 \quad (3.3)$$

fügen wir mit *Lagrangeschen* Faktoren $\mathfrak{E}^x dV$ und $\mathfrak{T}^x dV$ nach Integration zu (3.1) hinzu und erhalten:

$$\begin{aligned} & \iint_{(V)} [\mathfrak{E}^x \cdot \delta \vec{\varepsilon}_x + \mathfrak{T}^x \cdot \delta \vec{\varepsilon}_x - \mathfrak{f} \cdot \delta \mathfrak{w} - \mathfrak{m} \cdot \delta \vec{\varphi}] dV - \\ & - \iint_{(F)} [q \cdot \delta \mathfrak{w} + \mathfrak{p} \cdot \delta \vec{\varphi}] df = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

wobei jetzt auch nichtstarre, mit den geometrischen Bindungen verträgliche Verrückungsfelder $\delta \mathfrak{w}$ und $\delta \vec{\varphi}$ zulässig sind. Führt man darin nach (3.2) und (3.3) die virtuellen Lageänderungen ein, so liefert der *Gaußsche* Integralsatz mit $dV = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3$:

$$\begin{aligned} & - \iiint_{(V)} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_x (\sqrt{g} \mathfrak{E}^x) + \mathfrak{f} \right] \cdot \delta \mathfrak{w} + \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_x (\sqrt{g} \mathfrak{T}^x) + \mathfrak{g}_x \times \mathfrak{E}^x + \mathfrak{m} \right] \cdot \delta \vec{\varphi} \right\} dV + \\ & + \iint_{(F)} \{ [\mathfrak{E}^x n_x - q] \cdot \delta \mathfrak{w} + [\mathfrak{T}^x n_x - \mathfrak{p}] \cdot \delta \vec{\varphi} \} df = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Darin sind die Größen

$$n_x = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{g}_x \quad (3.6)$$

die kovarianten Maßzahlen des Vektors der äußeren Flächennormalen. Aus dem Verschwinden des Oberflächenintegrals folgt:

$$\mathfrak{E}^x n_x = q, \quad \mathfrak{T}^x n_x = \mathfrak{p}, \quad (3.7)$$

und dies liefert die mechanische Deutung der *Lagrangeschen* Faktoren \mathfrak{E}^x und \mathfrak{T}^x : sei beispielsweise das Flächenelement ein Stück der Koordinatenfläche $q^{(1)} = \text{const.}$; dann wird der zugehörige Normalenvektor

$$\mathfrak{n}^{(1)} = \frac{\mathfrak{g}^1}{\sqrt{\mathfrak{g}^1 \cdot \mathfrak{g}^1}} = \frac{\mathfrak{g}^1}{|\mathfrak{g}^{11}|}, \quad (3.8)$$

und daher

$$n_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}}, \quad n_2^{(1)} = n_3^{(1)} = 0. \quad (3.9)$$

Zum Kraftanteil $q^{(1)}$ der Oberflächenbelastung steht somit der „Spannungsvektor“ \mathfrak{S}^1 in der Beziehung

$$\mathfrak{S}^1 = q^{(1)} \sqrt{g}^{11}. \quad (3.10)$$

In gleicher Weise lassen sich die restlichen \mathfrak{S}^k als „Kraftspannungen“, die \mathfrak{S}^k als „Momentenspannungen“ deuten. Im Inneren des Körpers genügen sie, wie aus dem Verschwinden des Volumintegrals in (3.5) folgt, den Gleichgewichtsbedingungen

$$\partial_\alpha (\sqrt{g} \mathfrak{S}^\alpha) + (\sqrt{g} \mathfrak{f}) = 0, \quad (3.11)$$

$$\partial_\alpha (\sqrt{g} \mathfrak{S}^\alpha) + g_\alpha \times (\sqrt{g} \mathfrak{S}^\alpha) + (\sqrt{g} \mathfrak{m}) = 0. \quad (3.12)$$

Dies sind 6 Gleichgewichtsbedingungen für die 18 Spannungen \mathfrak{S}^k und \mathfrak{S}^k , das statische Problem ist also 12fach funktional unbestimmt.

Wir behandeln nur den Fall fehlender Volumkräfte \mathfrak{f} und Volummomente \mathfrak{m} , auf den sich, durch Abspalten einer Partikularlösung, der allgemeine Fall stets zurückführen läßt. Es gelte also

$$\partial_\alpha (\sqrt{g} \mathfrak{S}^\alpha) = 0, \quad \partial_\alpha (\sqrt{g} \mathfrak{S}^\alpha) + g_\alpha \times (\sqrt{g} \mathfrak{S}^\alpha) = 0 \quad (3.13) \quad (3.14)$$

im Bereichsinneren, und unverändert (3.7):

$$\mathfrak{S}^\alpha n_\alpha = q, \quad \mathfrak{S}^\alpha n_\alpha = p \quad (3.7)$$

auf der Bereichsoberfläche. Die Gleichgewichtsbedingungen (3.13) und (3.14) für die Spannungen \mathfrak{S}^k und \mathfrak{S}^k haben nun dieselbe Gestalt wie die Divergenzbedingungen (2.16) und (2.17) für die Inkompatibilitäten $\mathfrak{S}^{\mathfrak{f}}$ und $\mathfrak{S}^{\mathfrak{k}}$ des Deformationsfeldes. Wir können daher, im Anschluß an (2.14) und (2.15), die Spannungen so darstellen, daß sie diese Gleichgewichtsbedingungen identisch befriedigen:

$$\mathfrak{S}^k = e^{k\lambda\mu} \partial_\lambda \mathfrak{F}_\mu, \quad \mathfrak{S}^k = e^{k\lambda\mu} [\partial_\lambda \mathfrak{G}_\mu + g_\lambda \times \mathfrak{F}_\mu] \quad (3.15) \quad (3.16)$$

mit Hilfe von 18 willkürlichen „Spannungsfunktionen“ \mathfrak{F}_μ und \mathfrak{G}_μ , welche den inkompatiblen Deformationen \varkappa_μ und ε_μ entsprechen. Andererseits ist das statische Problem nur 12fach funktional unbestimmt, so daß seine allgemeine Lösung (3.15) und (3.16) 6 Funktionen zuviel enthält. Man bemerkt aber, daß es, entsprechend (2.5) und (2.6), Spannungsfunktionen $\mathring{\mathfrak{F}}_\mu$ und $\mathring{\mathfrak{G}}_\mu$ gibt, die den Spannungszustand „Null“ erzeugen:

$$\mathring{\mathfrak{F}}_\mu = \partial_\mu \vec{\Phi}, \quad \mathring{\mathfrak{G}}_\mu = \partial_\mu \mathfrak{W} + g_\mu \times \vec{\Phi} \quad (3.17) \quad (3.18)$$

mit willkürlichen Vektorfeldern $\vec{\Phi}$ und \mathfrak{W} ; diese entsprechen den Lageänderungen $\vec{\varphi}$ und \mathfrak{w} , während die „Nullspannungsfunktionen“ $\mathring{\mathfrak{F}}_\mu$ und $\mathring{\mathfrak{G}}_\mu$ mit kompatiblen Deformationsfeldern korrespondieren. Diese, aus der Theorie des gewöhnlichen Punktkontinuums bekannte Analogie (Weber [11]) gilt also auch im Cosseratschen Kontinuum. Damit ergibt sich die Möglichkeit, durch geeignete Wahl der 6 Funktionen $\vec{\Phi}$ und \mathfrak{W} Nullspannungsfunktionen $\mathring{\mathfrak{F}}_\mu$ und $\mathring{\mathfrak{G}}_\mu$ zu bilden, die nach Überlagerung 6 der 18 Spannungsfunktionen \mathfrak{F}_μ und

\mathfrak{G}_μ zu Null machen⁴⁾ oder, was gelegentlich praktisch ist, das Spannungsfunktionenfeld den „Divergenzbedingungen“

$$\partial_\mu (\sqrt{g} \mathfrak{F}^\mu) = 0, \quad \partial_\mu (\sqrt{g} \mathfrak{G}^\mu) + \mathfrak{g}_\mu \times (\sqrt{g} \mathfrak{F}^\mu) = 0 \quad (3.19) \quad (3.20)$$

zu unterwerfen.

Natürlich sind die Funktionen $\vec{\Phi}$ und \mathfrak{W} , die Erzeugenden der Nullspannungsfunktionen, nur bis auf „starre Bewegungen“

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_0 \quad (3.21)$$

und

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_0 + \vec{\Phi}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (3.22)$$

mit konstanten Vektoren $\vec{\Phi}_0$ und \mathfrak{W}_0 bestimmt!

Wir wenden uns jetzt den Oberflächenbedingungen (3.7) zu und berechnen die Dyname

$$\mathfrak{R} = \iint_{(f)} \mathfrak{q} \, df, \quad \mathfrak{M}_0 = \iint_{(f)} [\mathfrak{p} + \mathbf{r} \times \mathfrak{q}] \, df \quad (3.23)$$

der Oberflächenbelastungen, die an einem durch eine Kurve C berandeten Oberflächenteil f angreifen. Nach (3.7) und (3.15), (3.16) ist

$$\mathfrak{q} = e^{\alpha\lambda\mu} \partial_\lambda \mathfrak{F}_\mu n_\alpha, \quad \mathfrak{p} = e^{\alpha\lambda\mu} [\partial_\lambda \mathfrak{G}_\mu + \mathfrak{g}_\lambda \times \mathfrak{F}_\mu] n_\alpha. \quad (3.24) \quad (3.25)$$

Setzt man dies in (3.23) ein und formt nach dem *Stokesschen* Integralsatz um, so erhält man

$$\mathfrak{R} = \oint_C \mathfrak{F}_\mu \, ds^\mu, \quad \mathfrak{M}_0 = \oint_C [\mathfrak{G}_\mu + \mathbf{r} \times \mathfrak{F}_\mu] \, ds^\mu. \quad (3.26) \quad (3.27)$$

In dieser Auffassung erscheinen die Spannungsfunktionen als „Schnittkräfte“ und „Schnittmomente“, die längs des Flächenrandes angreifen; das Randstück ist dabei durch die Kraft

$$d\mathfrak{R} = \mathfrak{F}_\mu \, ds^\mu \quad (3.28)$$

und durch das Moment

$$d\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_\mu \, ds^\mu \quad (3.29)$$

beansprucht. Diese Formeln können in einer vollständigen (d. h. durch ein Stoffgesetz ergänzten) Theorie dazu dienen, das Randwertproblem für die Spannungsfunktionen zu formulieren. Im übrigen ergibt sich die Dyname „Null“, wenn man in (3.26) und (3.27) die Nullspannungsfunktionen $\vec{\mathfrak{F}}$ und $\vec{\mathfrak{G}}$ einsetzt; dies kann man als eine Kontrolle der bisherigen Rechnungen ansehen.

Wir kehren zu den Gleichgewichtsbedingungen (3.13), (3.14) zurück, deren erste Gruppe offenbar das Kräftegleichgewicht, deren zweite Gruppe das Momentengleichgewicht am Volumelement beschreibt. Wir führen durch

$$\mathfrak{E}^\alpha = S^{\alpha\beta} \mathfrak{g}_\beta, \quad S^{\alpha\beta} = \mathfrak{E}^\alpha \cdot \mathfrak{g}^\beta \quad (3.30)$$

den „Tensor der Kraftspannungen“ und entsprechend durch

$$\mathfrak{T}^\alpha = T^{\alpha\beta} \mathfrak{g}^\beta, \quad T^{\alpha\beta} = \mathfrak{T}^\alpha \cdot \mathfrak{g}_\beta \quad (3.31)$$

⁴⁾ das ist allerdings nicht in beliebiger Weise möglich.

den „Tensor der Momentenspannungen“ ein. Dann lautet die Tensordarstellung der Gleichgewichtsbedingungen (vgl. (2.16a), (2.17a)):

$$\nabla_{\alpha} S^{\alpha l} = 0, \quad \nabla_{\alpha} T_{,l}^{\alpha} + e_{\alpha\beta l} S^{\alpha\beta} = 0, \quad (3.13a) \quad (3.14a)$$

von denen man die 2. Gruppe auch in die Form

$$e^{ik\beta} \nabla_{\alpha} T_{,\beta}^{\alpha} + S^{ik} - S^{ki} = 0 \quad (3.14b)$$

überführen kann. Daraus geht hervor, daß, beim Fehlen von Volummomenten, der Tensor der Kraftspannungen dann und nur dann symmetrisch ist, wenn der Tensor der Momentenspannungen divergenzfrei ist, insbesondere also dann, wenn dieser Tensor verschwindet, also im Falle des gewöhnlichen Punktkontinuums, wo die Symmetrie des Spannungstensors S^{ik} als das „Boltzmannsche Axiom“ (Hamel [12]) bekannt ist.

Die weitere Behandlung der Gleichgewichtsbedingungen verläuft völlig analog den Ausführungen des kinematischen Teils: Aus (3.16) und (3.17) können wir die Spannungsfunktionen eliminieren und erhalten, entsprechend (2.18):

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\mu} = e^{\alpha\beta\varrho} & \left[(\partial_{\alpha} \mathfrak{G}_{\beta} \cdot g_{\mu}) g_{\varrho} - \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} \mathfrak{G}_{\beta} \cdot g_{\varrho}) g_{\mu} \right] \\ & - \left[(\mathfrak{T}^{\varrho} \cdot g_{\mu}) g_{\varrho} - \frac{1}{2} (\mathfrak{T}^{\varrho} \cdot g_{\varrho}) g_{\mu} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

bzw., entsprechend (2.18a):

$$F_{\mu}{}^l = e^{\alpha\beta\varrho} \left[\delta_{\varrho}^l \nabla_{\alpha} G_{\beta\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^l \nabla_{\alpha} G_{\beta\varrho} \right] - \left[T_{,\mu}^l - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^l T_{,\alpha}^{\alpha} \right]. \quad (3.32a)$$

Ferner ist, entsprechend (2.14a), (2.15a):

$$S^{kl} = e^{k\lambda\mu} \nabla_{\lambda} F_{\mu}{}^l, \quad T_{,l}^k = e^{k\lambda\mu} \nabla_{\lambda} G_{\mu l} + \delta_l^k F_{\alpha}{}^{\alpha} - F_l{}^k \quad (3.15a) \quad (3.16a)$$

durch Zusammenfassung von (3.15a) und (3.32a) wird dann, entsprechend (2.19a):

$$\begin{aligned} & \left[e^{k\alpha\lambda} e^{l\beta\mu} + \frac{1}{2} e^{kl\alpha} e^{\beta\mu\lambda} \right] \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} G_{\mu\lambda} = \\ & = \left[S^{kl} + e^{k\alpha\lambda} \nabla_{\alpha} T_{,\lambda}^l + \frac{1}{2} e^{lk\alpha} \nabla_{\alpha} T_{,\lambda}^{\lambda} \right] = {}^*S^{kl}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Auch hier genügt es wieder, den symmetrischen Teil des Spannungsfunktionentensors $G_{\mu\lambda}$ zu nehmen, ferner ist $\dot{S}^{kl} = \dot{S}^{lk}$ ein symmetrischer Tensor. Daher können wir auch schreiben:

$$e^{k\alpha\lambda} e^{l\beta\mu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} G_{\lambda\mu}^S = {}^*S^{kl} \quad (3.33a)$$

entsprechend Formel (2.27). Für das gewöhnliche Punktkontinuum wird ${}^*S^{kl} = S^{kl}$, da die Momentenspannungen verschwinden, und wir erhalten die bekannte Darstellung

$$S^{kl} = e^{k\alpha\lambda} e^{l\beta\mu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} G_{\lambda\mu}^S \quad (3.34)$$

durch einen symmetrischen Tensor $G_{\lambda\mu}^S$ der Spannungsfunktionen. In diesem Fall kann man die Dynamik der Oberflächenkräfte in folgender Weise durch den Spannungsfunktorentensor $G_{\lambda\mu}^S$ ausdrücken.

$$\mathfrak{R} = \oint_C e^{\alpha\beta\lambda} \nabla_\alpha G_{\beta\mu}^S g^\lambda ds^\mu, \quad (3.35)$$

$$\mathfrak{M}_0 = \oint_C [G_{\lambda\mu}^S + r^\alpha (\nabla_\lambda G_{\alpha\mu}^S - \nabla_\alpha G_{\lambda\mu}^S)] g^\lambda ds^\mu \quad (3.36)$$

mit

$$r^\alpha = \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}^\alpha. \quad (3.37)$$

Mit (3.35) und (3.36) haben wir Darstellungen der Dynamik der Oberflächenbelastungen wiedergefunden, die (in etwas anderer Schreibweise) vom Verfasser bereits früher angegeben worden sind [13], und mit deren Hilfe Schaefer [14] die Spannungsfunktionen einer singulären Dynamik untersucht hat.

4. Beziehungen zur Versetzungstheorie

In der Einführung wurde bereits erwähnt, daß das kinematische Modell der Versetzungstheorie das eines inkompatiblen Cosseratschen Kontinuums ist. Ohne die kinematischen Vorstellungen der Versetzungstheorie im einzelnen zu erörtern (vgl. hierzu [6], wo eine ausführliche Analyse gegeben wird), sollen hier nur die formalen Beziehungen betrachtet werden, die von den Gleichungen des Cosseratschen Kontinuums zu denen der Versetzungstheorie führen.

Wir beginnen mit einer von Kröner [6] stammenden Zerlegung des Deformationstensors ε_{il} , von dem vorausgesetzt werde, daß er im Unendlichen hinreichend stark verschwindet oder im Endlichen geeigneten Randbedingungen genügt.

Dann ist eine erste eindeutige Zerlegung:

$$\varepsilon_{il} = \nabla_i w_l + e_{i\alpha\lambda} \nabla^\alpha b_{\cdot l}^\lambda, \quad (4.1)$$

wodurch ε in den Gradienten eines Vektorfeldes w und den Rotor eines Tensorfeldes b aufgespalten wird. Ebenso zerlegen wir b :

$$b_{\cdot l}^\lambda = \nabla_l c^\lambda + e_{l\beta\mu} \nabla^\beta d^{\mu\lambda}. \quad (4.2)$$

Das ergibt zusammen mit (4.1):

$$\varepsilon_{il} = \nabla_i w_l + \nabla_l (e_{i\alpha\lambda} \nabla^\alpha c^\lambda) + e_{i\alpha\lambda} e_{l\beta\mu} \nabla^\alpha \nabla^\beta d^{\mu\lambda}. \quad (4.3)$$

Wir setzen

$$e_{i\alpha\lambda} \nabla^\alpha c^\lambda = u_i; \quad (4.4)$$

da u der Rotor des Vektorfeldes c ist, verschwindet seine Divergenz identisch:

$$\nabla^\alpha u_\alpha = 0. \quad (4.5)$$

Ferner zerlegen wir $d^{\mu\lambda}$ in seinen symmetrischen und seinen antisymmetrischen Teil:

$$d^{\mu\lambda} = d_S^{\mu\lambda} + d_A^{\mu\lambda} = d^{(\lambda\mu)} + e^{\tau\mu\lambda} h_\tau, \quad (4.6)$$

wobei

$$h_\tau = \frac{1}{2} e_{\tau\mu\lambda} d^{\mu\lambda} \quad (4.7)$$

ist. Schließlich setzen wir noch

$$\nabla^\tau h_\tau = p \quad (4.8)$$

und erhalten nach Zusammenfassung:

$$\varepsilon_{il} = \nabla_i (w_l + u_l) + e_{i\lambda\lambda} e_{l\beta\mu} \nabla^\alpha \nabla^\beta d^{(\lambda\mu)} - e_{il\lambda} [e^{\varrho\sigma\lambda} \nabla_\varrho u_\sigma + \nabla^\lambda p], \quad (4.9)$$

wobei (4.5) zu beachten ist.

Das 2. Glied in (4.9) ist, wie bereits früher erörtert, symmetrisch in i und l und stellt, im Cosseratschen Sinne, den inkompatiblen Teil ε_{il}^* des Deformationstensors ε_{il} dar; setzen wir nämlich

$$w_l + u_l = w_l' \quad (4.10)$$

und

$$e^{\varrho\sigma\lambda} \nabla_\varrho u_\sigma + \nabla^\lambda p = \varphi^\lambda, \quad (4.11)$$

so erscheint der Deformationstensor ε_{il} in der Gestalt

$$\varepsilon_{il} = \nabla_i w_l' - e_{il\lambda} \varphi^\lambda + \varepsilon_{(il)}^*. \quad (4.12)$$

Ferner definieren wir, wie früher, den Cosseratschen Krümmungstensor κ durch

$$\kappa_i^l = \nabla_i \varphi^l \quad (4.13)$$

und erkennen, daß wir mit (4.12) und (4.13) die Cosseratschen Deformationen wiedergefunden haben, allerdings ergänzt durch den inkompatiblen Anteil ε_{il}^* . Es gelten also nach (2.14a) und (2.15a) die Gleichungen

$$e^{k\lambda\mu} \nabla_\lambda \kappa_{\mu}^l = 0, \quad (4.14)$$

$$e^{k\lambda\mu} \nabla_\lambda \varepsilon_{\mu l} + \delta_l^k \kappa_{\lambda}^{\lambda} - \kappa_l^k = I_{\cdot l}^{(2)k}; \quad (4.15)$$

d. h.: im Cosseratschen Sinne sind die Krümmungen κ_i^l stets verträglich, da nach (4.11) ein eindeutiger Drehvektor $\vec{\varphi}$ existiert. Wir kommen darauf zurück.

Die Grundformel der Versetzungstheorie lautet nun

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{v}, \quad (4.16)$$

worin \boldsymbol{v} der Tensor der „Versetzungsdichte“ ist. Seine anschauliche Bedeutung kann man sich klarmachen an Hand von Abb. 3, die eine „Stufenversetzung“, und an Hand von Abb. 4, die eine „Schraubenversetzung“ zeigt. In Abb. 3 ist in ein regelmäßiges Gitter eine Netzebene eingeschoben worden, die in der (stark ausgezogenen) Versetzungslinie endet. Geht man in einer Fläche $x_3 = \text{const.}$ einmal um diese Linie herum, so durchstößt man die vom „Burgersvektor“ (Gleitrichtung) und der Versetzungslinie aufgespannte Gleitebene; dort kann man sich einen Sprung im Verschiebungsfeld denken. Die — in diesem Fall singuläre — Tensorkomponente $v_{\cdot 2}^3$ mißt die Stärke dieses Sprunges.

In der Abb. 4 wird die Schraubungsachse als Versetzungslinie definiert; hier fallen die Richtungen von Gleitung und Versetzung zusammen, und die — ebenfalls singuläre — Tensorkomponente $v_{\cdot 3}^3$ mißt wieder die Sprungstärke. In der Kontinuumsstheorie der Versetzungen geht man zu kontinuierlichen Versetzungsverteilungen über; der Tensor \boldsymbol{v} mißt dann die Stärke und Art derjenigen Versetzungslinien, die ein gegebenes Flächenelement durchsetzen.

Nach (4.16) ist

$$e^{k\lambda\mu} \nabla_\lambda \varepsilon_{\mu l} = v_{.l}^k, \quad (4.16a)$$

und daher nach (4.15):

$$I_{.l}^{(2)k} = v_{.l}^k + \delta_l^k z_{\lambda.}^{\lambda} - z_l^{k.}, \quad (4.17)$$

während andererseits nach (4.12)

$$v_{.l}^k = e^{k\lambda\mu} \nabla_\lambda \varepsilon_{(\mu l)}^* - \delta_l^k z_{\lambda.}^{\lambda} + z_l^{k.}, \quad (4.18)$$

also

$$I_{.l}^{(2)k} = e^{k\lambda\mu} \nabla_\lambda \varepsilon_{(\mu l)}^* \quad (4.19)$$

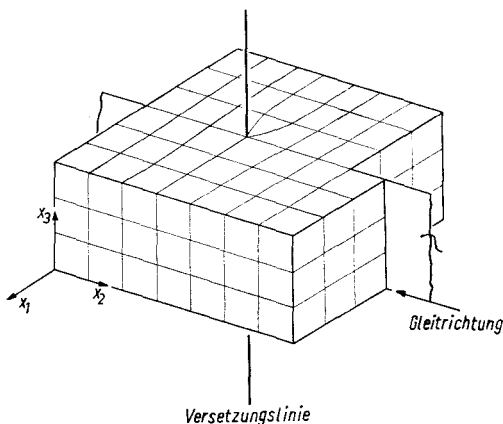


Abb. 3

ist. Der Inkompatibilitätstensor $I_{.l}^{(2)k}$ steht also in einfachen Beziehungen sowohl zum Tensor der Versetzungsdichte als auch zum inkompatiblen Anteil des Deformationstensors selbst. Ist dieser Anteil Null, so ergibt sich aus (4.17):

$$v_{.l}^k = z_l^{k.} - \delta_l^k z_{\lambda.}^{\lambda}, \quad (4.20)$$

eine Beziehung, die zuerst von Nye [15] abgeleitet worden ist (es liegt hier der Fall der „spannungsfreien Strukturkrümmungen“ vor, vgl. [6]). Verfahren wir nun weiter wie im 2. Abschnitt, indem wir den Krümmungstensor z aus (4.15) berechnen und in (4.14) einsetzen, so bekommen wir nach einer kleinen Zwischenrechnung, bei der zu beachten ist, daß nach (4.16a) die Spur v_{λ}^{λ} des Tensors der Versetzungsdichte verschwindet:

$$e^{k\lambda} e^{l\beta\mu} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varepsilon_{(\lambda\mu)}^* = I^{kl} = e^{k\lambda} \nabla_\alpha v_{\lambda}^l; \quad (4.21)$$

in der Krönerschen Schreibweise:

$$\text{Ink } \boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{v} \times \nabla, \quad (4.22)$$

und die rechte Seite verschwindet nach (4.16a).

Wir kehren nochmals zur Frage zurück, ob die Drehungen kompatibel sind. Das ist eine Angelegenheit der Definition: wie gezeigt, sind sie es im *Cosserat*-schen Sinne stets (wenn man von Singularitäten absieht, die nicht überall dicht liegen). Nennt man aber ein Tensorfeld ξ inkompatibel, wenn $\text{Ink } \xi \neq 0$,

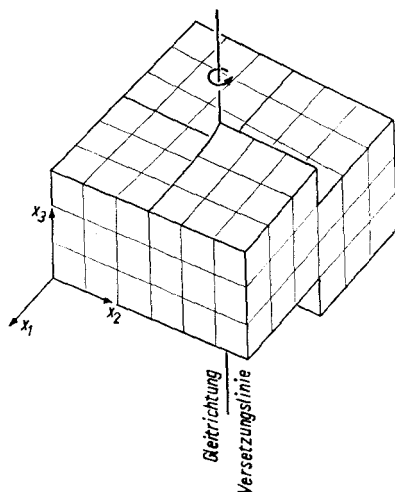


Abb. 4

wenn also

$$e^{k\lambda} e^{l\beta\mu} \nabla_\alpha \nabla_\beta \xi_{\lambda\mu} \neq 0$$

ist, dann werden die Drehungen inkompatibel, wie man aus folgender Überlegung erkennt:

Wir zerlegen den Deformationstensor (4.12) in seinen symmetrischen und seinen antisymmetrischen Teil, für die sich folgende Ausdrücke ergeben:

$$\varepsilon_{il}^S = \frac{1}{2} [\nabla_i (w_l + u_l) + \nabla_l (w_i + u_i)] + \varepsilon_{(il)}^*, \quad (4.23)$$

$$\varepsilon_{il}^A = \frac{1}{2} [\nabla_i (w_l - u_l) - \nabla_l (w_i - u_i)] - e_{il\alpha} \nabla^\alpha p, \quad (4.24)$$

und nun ist ε_{il}^A ein inkompatibles Drehfeld, denn es wird

$$e^{k\lambda} e^{l\beta\mu} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varepsilon_{\lambda\mu}^A = -e^{kl\alpha} \nabla_\alpha (\Delta p). \quad (4.25)$$

Zur (im obigen Sinne definierten) Inkompatibilität des Drehfeldes trägt also nur das Skalarfeld p bei.

Literatur

- [1] *E. und F. Cosserat*, Théorie des Corps déformables Paris (1909).
- [2] *Lord Kelvin*, Math. and phys. Papers, vol. I (1882), vol. II (1884), vol. III (1890).
- [3] *D. Poisson*, Mém. d. l'Acad. Tome XVIII (1842).
- [4] *W. Voigt*, Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle I, II Abh. d. Königl. Ges. d. Wiss. Göttingen, Bd. 34 (1887).

- [5] *J. Sulria*, L'action euclidienne de déformation et de mouvement. Mém. des Sci. Phys. Fasc. XXIX (1935).
- [6] *E. Kröner*, Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin, Göttingen, Heidelberg (1958).
- [7] *A. Seeger*, Neuere mathematische Methoden und physikalische Ergebnisse zur Kristallplastizität, in: Verformung und Fließen des Festkörpers (Koll. Madrid 1955). Berlin, Göttingen, Heidelberg (1956).
- [8] *K. Kondo*, Memoirs of the unifying study of the basic problem in engineering sciences by means of geometry, Vol. I, Tokyo (1955).
- [9] *B. A. Bilby*, *R. Bullough* u. *E. Smith*, Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non — Riemannian Geometrie, Proc. roy. Soc. London Ser. A, 231 (1955).
- [10] *G. Rieder*, Plastische Verformung und Magnetostraktion, Z. angew. Phys. 9 (1957).
- [11] *C. Weber*, Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums ZAMM 28 (1948).
- [12] *G. Hamel*, Theoretische Mechanik, Berlin 1949.
- [13] *W. Günther*, Spannungsfunktionen und Verträglichkeitsbedingungen der Kontinuumsmechanik, Abh. d. Brschwg. Wiss. Gesellschaft VI (1954).
- [14] *H. Schaefer*, Die Spannungsfunktionen einer Dyname, Abh. d. Brschwg. Wiss. Gesellschaft VII (1955).
- [15] *J. F. Nye*, Some geometrical relations in dislocated crystals, Acta metallurgica I (1953).